Institut Supérieur de Sciences Appliquées et Économiques
Centre du Liban associé au
Conservatoire National des Arts et Métiers
le cnam Liban

Analyse numérique matricielle et optimisation (CSC104)

Final 2017-2018 **2h :00**

Centre de : Beyrouth

Documents Autorisés : Calculatrice programmable

En Annexe un formulaire regroupant les algorithmes et les principaux résultats

Examen proposé par : J.SAAB

Exercice 1 (*20 points*) On pose

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & -1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Donner la décomposition LU de la matrice A
2. En déduire la solution du système $Ax = b$ où $b =^t (1.5, 4, -14, -6.5)$
3. Soit $B = ({}^tU).A.({}^tL)$. Sans calculs supplémentaire, donner une décomposition LU de la matrice B

Exercice 2 (*40 points*) :Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, une matrice symétrique définie positive. On note par λ_i les valeurs propres de A telles que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

On considère l'algorithme du gradient à pas constant, associé au système linéaire $Ax = b$:

$$\left\{ \begin{array}{lcc} r^k & = & -(\nabla J)(x^k) = b - Ax^k \\ x^{k+1} & = & x^k + \alpha.r^k \end{array} \right. \quad \text{où } \alpha > 0$$

1. Donner B, la matrice de la méthode itérative.
2. Montrer que cette méthode converge si $\alpha = \dfrac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$
3. Montrer que $||A||_2 = \rho(A)$ en déduire que $Cond(A) = \dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}$ où $||.||_2$ désigne la norme matricielle subordonnée à la norme euclidienne, $\rho(A)$ désigne le spectre de A et $Cond(A) = ||A||_2.||A^{-1}||_2$ est le conditionnement de A.
4. On note par $e^k = x^k - \bar{x}$ où $\bar{x}$ est la solution exacte du système $Ax = b$. Interpréter e^k et montrer que
$$e^{\kappa+1} = B.e^k$$
en déduire que $||e^{k+1}||_2 \leq \dfrac{Cond(A) - 1}{Cond(A) + 1}||e^k||_2$. Donner un sens analytique à une matrice bien conditionnée !

5. Application : On pose

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que la fonctionnelle du gradient associée à ce système est

$$J(X) = \frac{1}{2}({}^tX)AX -^t (b)X$$

(a) Exprimer J sous la forme d'une fonction à deux variables (x, y)

(b) Ecrire deux itérations X^1 et X^2 de l'algorithme du gradient à pas optimal ; on part de $X^0 =^t (2, 1)$.

Exercice 3 (*40 points*) :Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que ses éléments diagonaux soient tous non nuls et soit b un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On souhaite résoudre le système linéaire $Ax = b$ en utilisant la méthode itérative suivante :

α étant un réel non nul et le vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^n$ étant donné, on construit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par la formule de récurrence

$$x_{k+1} = (I - \alpha D^{-1}A)x_k + \alpha D^{-1}b. \tag{1}$$

où I est la matrice identité et D la matrice diagonale constituée de la diagonale de A $(D_{ii} = A_{ii})$.

1. Montrer que si la suite (x_k) converge vers $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ alors $\bar{x}$ est la solution du système linéaire $Ax = b$.
2. Exprimer les coèfficients de la marice $(I - \alpha D^{-1}A)$ en fonction des coèfficients de A
3. On suppose que A est à diagonale strictement dominante et que $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que

$$||I - \alpha D^{-1}A||_\infty < 1 \tag{2}$$

On rappelle qu'une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ est dite à diagonale strictement dominante si

$$\forall i \in \mathbb{N}, \; 1 \leq i \leq n, \; \sum_{j=1, \; j\neq i}^{n} |B_{i\;j}| < |B_{i\;i}|$$

4. Montrer que, sous les hypothèses de la question précédente, la méthode itérative (1) converge
5. Quelle méthode étudiée en cours retrouve-t-on quand $\alpha = 1$?

Formulaires

1. Algorithme de factorisation LU

$$A = A_0 = \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} \end{pmatrix};$$

à l'étape k on pose $L_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & & \\ & \vdots & \frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} & \ddots & & \\ & & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_{n,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\widetilde{L}_k = (L_k)^{-1}$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & \cdots & & & a_{1n}^0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & a_{kk}^{(k-1)} & \cdots & a_{kn}^{(k-1)} \\ & & 0 & a_{ij}^{(k)} & \\ 0 & & \vdots & & \end{pmatrix}$$

avec $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \dfrac{a_{i\ k}^{(k-1)}.a_{k\ j}^{(k-1)}.}{a_{k\ k}^{(k-1)}}, \ i,j = k+1 \cdots n$

à l'étape $n-1$, $A_{n-1} = \widetilde{L}_{n-1}. \cdots .\widetilde{L}_1.A_0$

$$A = \underbrace{L_1.L_2. \cdots .L_{n-1}}_{L}\underbrace{A_{n-1}}_{U}$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}^n, \ ||x||_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|; \quad ||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$
3. $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \ ||A||_\infty = \max\limits_{x \ne 0} \dfrac{||Ax||_\infty}{||x||_\infty} = \max\limits_{1 \le i \le n} (\sum\limits_{j=1}^n |A_{i\ j}|)$
4. $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \ ||A||_2 = \max\limits_{x \ne 0} \dfrac{||Ax||_2}{||x||_2} = \sqrt{\rho(A.^tA)}$